SOL-Marktplatz Zürich, 3.4.2013

Unterrichtseinheit Selbstlernsemester Mathematik

Rahmenbedingungen

Mathematik
11. Schuljahr
Dauer: 1 Semester
SOL Projekt der KZO Wetzikon

Ziel, Ergebnis

Die Lernenden bearbeiten Ihre Übungen selbständig in heterogenen Lerngruppen mit Tutoren. Von jedem Treffen der Lerngruppe wird ein Protokoll erstellt, das abgegeben und benotet wird.

Kurzbeschreibung

Im Selbstlernsemester Mathematik werden drei Themen (Vektorgeometrie I und II sowie Zahlenfolgen) bearbeitet und einzeln geprüft. Dabei führe ich jede Woche während einer Lektion in den aktuellen Stoff ein. Diese Lektion ist für die Klasse obligatorisch. Ich exponiere die Kernidee am Hellraumprojektor, während die Lernenden ihre Handouts vervollständigen.

Die Übungsaufgaben werden von den Schülerinnen und Schülern individuell bearbeitet, wobei sie sich einmal pro Woche zu einem von ihnen gewählten Zeitpunkt in einer Lerngruppe zur Besprechung von Problemen und zur Beantwortung von Fragen treffen. Diese Lerngruppen sind heterogen zusammengesetzt. Insbesondere soll jede Gruppe auch einen Tutor oder eine Tutorin enthalten, welche bei fachlichen Problemen weiterhelfen kann. Von den Sitzungen der Lerngruppen werden Protokolle erstellt, welche von mir korrigiert und benotet werden. Der Protokollführer/die Protokollführerin wechselt alternierend.

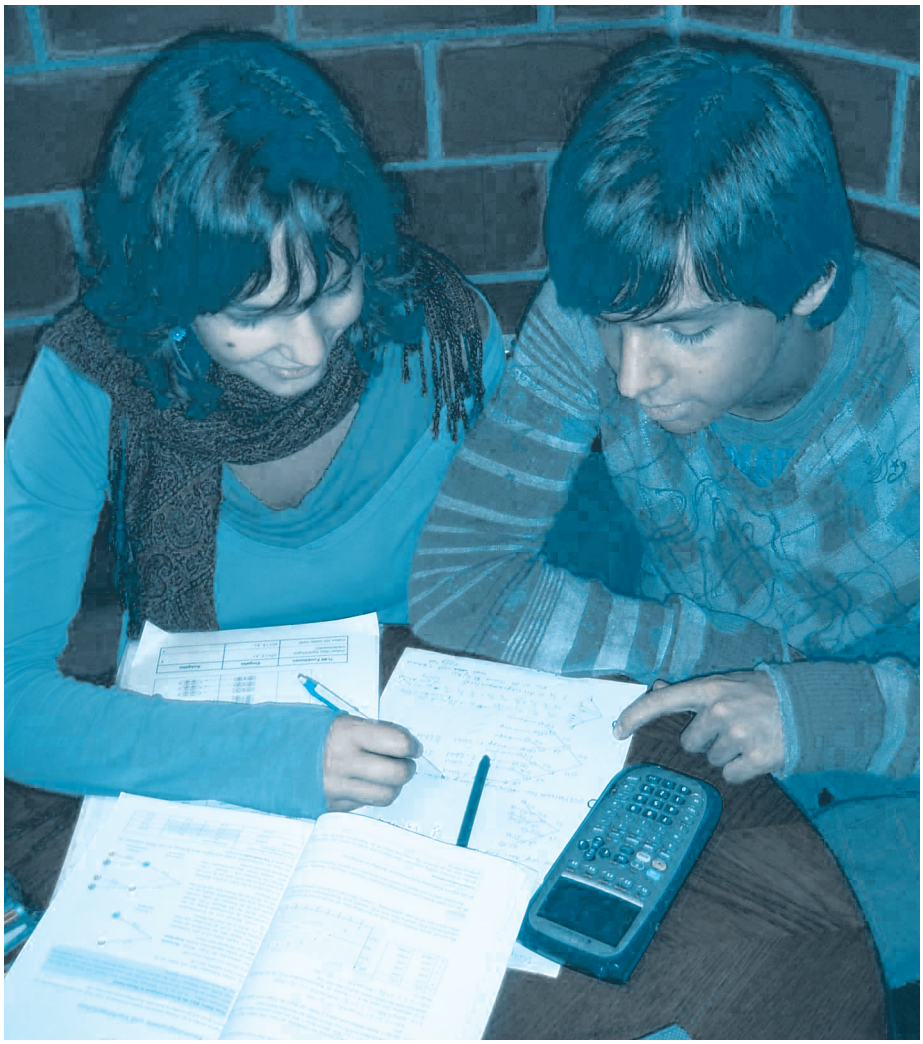
Ausserdem findet jede Woche eine freiwillige Übungslektion statt. Während dieser Lektion bespreche ich einzelne Übungsaufgaben und beantworte die Fragen der Anwesenden.

SOL-Spezifisches

Die Organisation der Lerngruppen erfolgt selbständig durch die Lernenden. Bis auf eine Lektion Theorieunterricht pro Woche sind die Lernenden selbständig für ihren Lernprozess verantwortlich. Durch die Arbeit in der Lerngruppe lernen die Schülerinnen und Schüler, den eigenen Lernprozess zu planen, zu regulieren und zu reflektieren. Die selbständige Bearbeitung anspruchsvoller Übungsaufgaben fördert ausserdem die Frustrationstoleranz der Lernenden und stärkt ihr Selbstvertrauen im Umgang mit Mathematik.

Kontakt

Beat Trachsler
KZO Wetzikon
beat.trachsler@kzo.ch
https://sites.google.com/site/mathematikict/



Wenn die Lernenden mehr Verantwortung für ihr Lernen tragen

Ein Selbstlernsemester in Mathematik

Beat Trachsler

Können Gymnasiastinnen und Gymnasiasten während eines ganzen Semesters mit nur einer Theoriestunde pro Woche selbstständig Mathematikstoff lernen? Der Artikel beschreibt ein Schulentwicklungsprojekt aus dem Zürcher Oberland in der Schweiz, das Selbstlernsemester. Zur Illustration dienen die Erfahrungen mit einer Klasse des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums.

Im Herbstsemester 2004/05 wurde an der Kantonschule Zürcher Oberland, einem Schweizer Gymnasium mit ca. 1200 Schülerinnen und Schülern, mit drei Klassen des 11. Schuljahres ein Schulentwicklungsprojekt durchgeführt, das große Beachtung in den Medien fand (vgl. Internethinweise).
Das Projekt war zeitlich auf ein Semester beschränkt, das so genannte Selbstlernsemester (SLS). Dabei fiel in den Fächern Deutsch, Englisch, Französisch, Mathematik, Sport und im Schwerpunktfach ein großer Teil der gemeinsamen Unterrichtsstunden weg. Es blieb in diesen Fächern nur eine Stunde pro Woche im Stundenplan eingetragen. Am Nachmittag hatten die Klassen daher unterrichtsfrei. Das Projekt veränderte also die „Grammatik der Schule“ (Tyack/Tobin 1994), d. h. vertraute Strukturen (Stundenplan, Lernen im Klassenverband, etc.) wurden in Frage gestellt. Inzwischen liegt eine umfangreiche externe Evaluation vor (Binder/Feller-Länzlinger 2005) und der Zürcher Bildungsrat hat grünes Licht für eine weitere dreijährige Implementierungsphase gegeben. Im Februar 2006 wurde eine Schülerbefragung zum SLS in Mathematik (KZO 2006) durchgeführt, weil sich im Herbstsemester 2005/06 gezeigt hatte, dass viele Schülerinnen und Schüler mit dem SLS in Mathematik größere Schwierigkeiten hatten als in anderen Fächern. Diese Schülerbefragung ergab unter anderem, dass nur 20 % der Schülerinnen und Schü-ler regelmäßig in Gruppen gelernt hatten. Eine Schlussfolgerung daraus war, dass der gezielte Einsatz von Lerngruppen auch in der Mathematik hilfreich sein könnte. Außerdem stellte die Schulleitung für die Mathematik eine zusätzliche Unterrichtsstunde zur Verfügung, die beispielsweise zur Vor- und Nachbesprechung der Hausaufgaben eingesetzt werden konnte.
Am 24. August 2006 begann das SLS für die Klasse C5b, eine Klasse des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums im 11. Schuljahr. Die Vorbereitungen hatten in vielen Fächern schon vor den Sommerferien angefangen, so auch in der Mathematik: Für die selbständige Arbeit im SLS waren Lerngruppen von je zwei bis drei Lernenden gebildet worden, und zwar so, dass die Leistungsstärke in jeder Gruppe variierte. Die Gruppenbildung überließ ich der Klasse. Ich griff nur ein, wenn sich beispielsweise drei starke Schülerinnen zu einer Gruppe zusammenschließen wollten. In solchen Fällen suchten wir im Gespräch nach einer anderen Lösung. Außerdem hatten zwei Schüler im Rahmen eines Informatikprojekts im Frühlingssemester eine Kommunikationsplattform speziell für die SLS Fächer entwickelt.
Um den verschiedenen Neigungen und

Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler gerecht zu werden, habe ich das Semester in drei Blöcke aufgeteilt, welche sich thematisch und methodisch stark unterschieden. Im ersten Block wurden die Grundbegriffe der Vektorrechnung eingeführt. Im zweiten Block erarbeitete die Klasse das Thema Zahlenfolgen selbständig anhand von Lernaufgaben. Im dritten und letzten Block studierten die Schülerinnen und Schüler die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand des Lehrbuchs „Einführung in die beurteilende Statistik“ (Strick 1998).

Rechnen mit Vektoren

Für die Einführung in die Vektorrechnung habe ich ein Skript verfasst. In der Theoriestunde wurden die zentralen Fragestellungen des aktuellen Stoffs anhand dieses Skriptes präsentiert. Die Schülerinnen und Schüler erhielten zudem ein Blatt mit Kontrollfragen zur Theorie und eine Reihe weiterführender Aufgaben, welche nach ihrer Komplexität geordnet und taxiert waren. Dabei wurden die Aufgaben gemäß Bloom (1976) u. a. nach Wissens-, Verständnis-, Anwendungs- und Transferaufgaben eingeteilt. Damit wurden die Schülerinnen und Schüler in die Lerngruppen entlassen, welche sich nicht selten zwei bis drei Stunden pro Woche intensiv mit den Mathematikaufgaben beschäftigten. Von diesen Treffen fertigte jede Woche ein anderes Gruppenmitglied ein Protokoll an. Diese Protokolle wurden genau wie die Hausaufgaben jede Woche von mir korrigiert.

Das Resultat war schon in der zweiten Schulwoche verblüffend: Alle Schülerinnen und Schüler konnten die Verständnis- und Transferaufgaben fehlerfrei lösen. Unterschiede traten erst bei schwierigeren Aufgabentypen auf, wie zum Beispiel beim Analysieren von neuen Problemen und bei Beweisaufgaben. Gerade dort waren die Protokolle der Lerngruppen eine wertvolle Ergänzung bei der Korrektur. Als Beispiel dafür verweise ich auf Auszüge aus dem Protokoll in *Abb. 1*. Sophie hat das Protokoll am Computer erstellt, was natürlich nicht verlangt war. Sie beschreibt darin die erste Sitzung ihrer Lerngruppe. Das Protokoll belegt, dass sich alle Gruppenmitglieder intensiv mit dem Stoff beschäftigt haben. Die aufgeführten Probleme liegen offensichtlich auf ganz unterschiedlichen Verständnisebenen. Dabei fallen vor allem die Präzision und das Geschick bei der Beschreibung der Probleme auf. Dieses Protokoll zeigt auch die Bedeutung der „Schülerlehrer“ oder Tutorinnen bzw. Tutoren für das SLS in Mathematik. In Sophies Gruppe gab es eine Schülerin, die jahrelang große Schwierigkeiten mit Mathematik hatte. Im SLS konnte sie ihre Leistung mit Sophies Hilfe um mehr als eine Note steigern. Besonders schön ist dabei, dass die Leistungen dieser Schülerin auch nach dem SLS auf diesem Niveau geblieben sind. Die Tutorin konnte hier bildlich gesprochen eine Tür öffnen. Entscheidend ist deshalb, dass die Lerngruppen leistungsgemischt sind.

Abb. 1: *Auszüge aus dem Protokoll von Sophie*

Zur Rolle der Tutorinnen und Tutoren wurde im Rahmen eines Radiointerviews die folgende Frage gestellt: Haben die Tutoren nicht Angst, in der Klasse als Streber abgestempelt zu werden? Sophie antwortete darauf wie folgt: „Ich habe meine Stärken in der Mathematik. Meine Kolleginnen haben ihre Stärken woanders. Da sind wir froh, wenn wir uns gegenseitig helfen können.“ Da das SLS in sechs unterschiedlichen Fächern stattfindet, können sich die Schülerinnen und Schüler gegenseitig helfen, ohne dass dabei die Arbeit an einigen wenigen hängen bleibt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die letzte Phase des SLS war in mancher Hinsicht die anspruchsvollste. Die Klasse arbeitete mit dem Lehrbuch von Strick (1998) weitgehend selbständig. Dabei zeigte sich, dass viele Schülerinnen und Schüler nicht darauf vorbereitet waren, sich die Theorie selbstständig durch ein Buch anzueignen. Bisher hatten sie ja den Stoff von mir in relativ kleinen Portionen in Form von Theorieblättern oder Lernaufgaben vermittelt bekommen. Anfangs entstanden deshalb einige Leerlaufphasen in den Lerngruppen, weil die Schülerinnen und Schüler den Theoriebeiträgen im Buch zu wenig Beachtung schenkten. So schreibt Sophie in einem Protokoll: „Was man daraus lernt: das nächste Mal die

Tipps des Lehrers auch befolgen und sie nicht nur in die Agenda schreiben. Das Ganze wäre nämlich eine Seite weiter vorne beschrieben gewesen."
Gegen Ende des Semesters hatten sich die Lerngruppen aber an die Arbeitsweise mit dem Buch gewöhnt, wie die Auszüge aus einem Protokoll von Niculin (Abb. 2) zeigen. Besonders hübsch finde ich die Überlegungen zum Schwierigkeitsgrad, welche belegen, dass sich Niculin auf verschiedenen Ebenen intensiv mit diesen Aufgaben beschäftigt hat. Gleiches gilt für die Bemerkung zur Aufgabe 20. Das Protokoll liefert hier Informationen, die man der Rechnung allein nicht ansieht. Dieser Einblick in den Gedankengang der Schülerinnen und Schüler hat mir die Vorbereitung der Aufgabenbesprechungsstunde stark erleichtert.

Abb. 2: *Auszüge aus dem Protokoll von Niculin*

Bei strukturell komplexeren Themen wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung lasse ich meine Klassen im Hinblick auf die finale Lernkontrolle jeweils sogenannte Concept Maps erstellen (vgl. Nückles u. a. 2004). Diese dienen den Schülerinnen und Schülern als Lernhilfe und helfen mir, allfällige Unklarheiten bei der Prüfungsvorbereitung aufzugreifen. Concept Maps geben also nicht nur Aufschluss über den behandelten Stoff, sondern auch über den Stand der Erkenntnisse in der Klasse, wie das Beispiel von Angela (*Abb. 3*) zeigt.

Abb. 3: *Concept Map zur Stochastik*

Fazit

Es ist nicht leicht, die verschiedenen Eindrücke aus dem SLS mit der C5b auf einen Nenner zu bringen. Für viele Schülerinnen und Schüler aus dieser Klasse hat sich die Arbeitshaltung in Mathematik verändert. Einige sind selbständiger, aber auch selbstbewusster geworden. So stellte beispielsweise Anna in ihrem Protokoll die Taxierung einer Aufgabe zum Thema Zahlenfolgen in Frage: „Ist dies wirklich eine K5-Aufgabe?" Ein durchaus erfreulicher Nebeneffekt! Außerdem hat sich in einzelnen Fällen auch die Einstellung zur Mathematik verändert, wie der folgende Satz aus dem Protokoll von Angela zum Thema arithmetische Folgen belegt: „In meinen Augen war dies die spannendste Aufgabe, die wir je lösen mussten. Nach dem Motto ‚Probieren geht über Studieren' haben wir sogar die richtige Lösung gefunden. Und der Lösungsweg erschien uns auch logisch." Zu den verschiedenen Lernhilfen, welche zur Auswahl standen, bemerkte Niculin nach der ersten Prüfung: „Es ist gut, dass wir selbst wählen können, wie wir den Stoff lernen wollen. Dadurch konnte ich meine Mathematiknote entscheidend verbessern."
Wunder darf man aber auch bei diesem Projekt nicht erwarten. Das SLS verstärkt vielmehr bereits vorhandene Tendenzen oder, wie es ein Schüler im Vorjahr sehr treffend formuliert hat, im SLS erscheint der Lernprozess wie unter einer Lupe. Für die Mathematik im Speziellen bleibt zu ergänzen, dass dabei wohl nicht ganz so viel Stoff behandelt werden kann wie in einem regulären Semester, dass das Verständnis des Gelernten aber oft tiefer zu sein scheint. Daneben bietet das SLS die Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler eigene Texte mit mathematischem Inhalt schreiben zu lassen. Des Weiteren erproben sie dabei neue Arbeitsformen, wie z. B. das Lernen in der Gruppe, eine Fähigkeit, die ihnen bestimmt nicht nur für ein Hochschulstudium zugute kommt. Abschließend möchte ich noch anfügen, dass der Unterschied zum Normalunterricht auch nicht überschätzt werden sollte. So meinte Paul rückblickend zum SLS in Mathematik: „Die Hausaufgaben sind geblieben, nur haben Sie sich als Lehrer etwas zurückgezogen und uns mehr Verantwortung übergeben."

Internethinweise

Bericht über das Selbstlernsemester:
http://www.kzo.ch/index.php?id=sls-berichte

Literatur

Binder, Hans-Martin / Feller-Länzlinger, Ruth (2005): Externe Evaluation des Pilotprojekts „Selbstlernsemester" an der Kantonschule Zürcher Oberland, Interface, Institut für Politikstudien, Luzern. Online: http://www.bildungsdirektion.zh.ch/internet/bi/de/publikationen/evaluationen.html
Bloom, Benjamin S. (1976): Taxonomie von

Lernzielen im kognitiven Bereich, Beltz Verlag, Weinheim und Basel.
KZO (2006), Kantonsschule Zürcher Oberland (Hrsg.): Schülerbefragung zum Thema Mathematik im Selbstlernsemester. Online: http://www.kzo.ch/fileadmin/internet/pdf_internet/SLS-Berichte/Umfrage_sls.pdf
Nückles, Matthias u. a. (2004): Mind Maps und Concept Maps. Visualisieren – Organisieren – Kommunizieren, dtv, München.
Strick, Heinz Klaus (1998): Einführung in die beurteilende Statistik, Schroedel Verlag, Hannover.
Tyack, David / Tobin, William (1994): The „Grammar" of Schooling: Why has it been so hard to change?, in: American Educational Research Journal 31 (3), S. 453–479.

Beat Trachsler,
Kantonsschule Zürcher Oberland,
Wetzikon/CH
beat.trachsler@kzo.ch

1. Seite 24, Aufgabe 18
   Problem: Wie wird bei der Multiplikation mit einem Skalar die Länge eines Vektors gestreckt?
   Antwort: Da alle Komponenten mit demselben Faktor multipliziert werden, hat dieser auch direkten Einfluss auf den Betrag des Vektors.
   Beweis: $\sqrt{(x \cdot a_x)^2 + (x \cdot a_y)^2 + (x \cdot a_z)^2} = \sqrt{x^2 (a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2})}$
   $= x \cdot \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}} = x \cdot |\vec{a}|$

...

3. Seite 25, Aufgabe 21
   Problem: Bei der Aufstellung der Gleichung wurde „y – 1" durch „x" ersetzt.
   Nun kommt die Person auf ein falsches Resultat, liegt das an der Substitution?
   Antwort:
   - Diese Substitution kann problemlos vorgenommen werden. Der Fehler muss woanders liegen.
   - Fehler gemeinsam gefunden: anstatt potenziert wurde die Wurzel gezogen.

4. Seite 25, Aufgabe 27a
   Überlegung: P muss auf der Mittelsenkrechten zu AB liegen, aber wo?
   Vorschlag: Anders beginnen, mit der Bedingung $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ ist bereits eine Gleichung gegeben. Da P auf der y-Achse liegt, haben die Komponenten P_x und P_z den Wert 0. Somit hat man eine Gleichung mit einer Unbekannten, nach der aufgelöst werden kann.

Abb. 1: *Auszüge aus dem Protokoll von Sophie*

15. Entwickle die binomischen Terme:

a) $(x+1)^5$ **c)** $(x+1)^7$ **e)** $(a-b)^3$

b) $(x-1)^5$ **d)** $(x-1)^4$ **f)** $(a-b)^4$

15a) $1x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ ✓

c) $x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$ ✓

Aufgabe 15:
Bei dieser Frage gab es Unstimmigkeiten bezüglich der Lösungsart. Die binomische Formel bloss auszurechen schien auf den ersten Blick zu einfach. Die Aufgabe entspricht jedoch dem Schwierigkeitsgrad K2, so dass wir glaubten, die Aufgabe sei doch so zu verstehen.

20. Zehn Schüler, die einen Jahrgang wiederholen müssen, können auf fünf Klassen (a, b, c d, e) verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten der Einteilung gibt es, wenn

a) in jede Klasse 2 Schüler kommen sollen,

b) in Klasse a 3 Schüler, in Klasse b 5 Schüler und in Klasse c 2 Schüler,

c) in Klasse a 5 Schüler, in Klasse b 2 Schüler und in Klasse c 3 Schüler,

d) in eine der Klassen 6 Schüler und in eine andere Klasse 4 Schüler?

20 a) $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113'400$ ✓

b) $\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{2}{2} = 2520$ ✓

c) $\binom{10}{5} \cdot \binom{5}{2} = 2520$ ✓

d) $\binom{10}{6} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} = 4200$ ✓

Aufgabe 20:
Das einzige Problem bestand darin, zu erkennen, dass, wenn man bereits 2 Schüler einer Klasse zugeteilt hat, nur noch 8 übrig bleiben, um sie auf die anderen Klassen zu verteilen.
Die zweite und dritte Teilaufgabe unterscheidet sich ausgenommen von den Zahlenwerten nicht von der Teilaufgabe a).
Zum Schluss wird es jedoch nochmals schwieriger. Wir haben anfänglich berechnet, wie viele Möglichkeiten es gibt die Schüler so zu verteilen, wie es die Aufgabe sagt, jedoch wenn es nur zwei Klassen gäbe. Man muss nun also noch ausrechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Schüler in die verschiedenen Klassen einzuteilen. Dieser Wert multipliziert mit der Anzahl Möglichkeiten, die Schüler in zwei Klassen zu verteilen, gibt dann schlussendlich das richtige Resultat.

Abb. 2: *Auszüge aus dem Protokoll von Niculin*

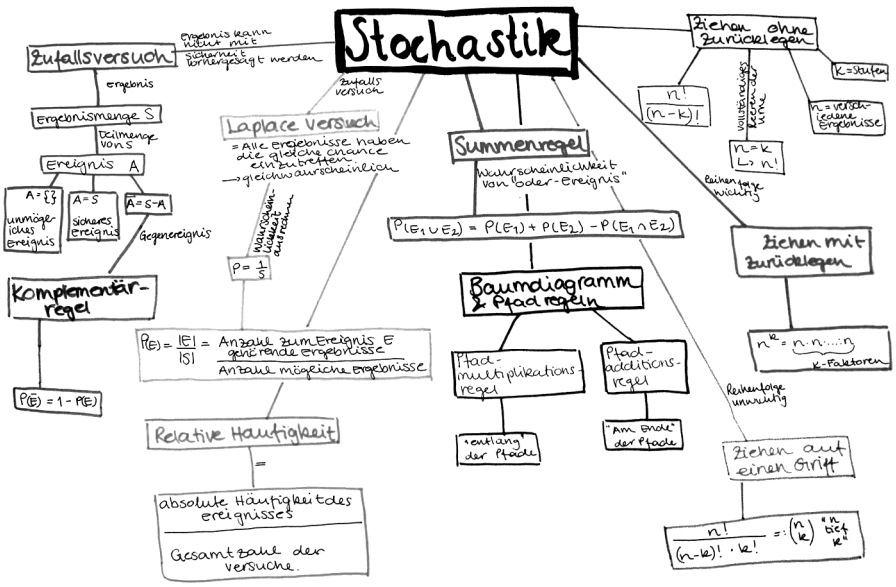


Abb. 3: *Concept Map zur Stochastik*