

## QUANTENSTATISTIK LIGHT

Viel Statistik in der Physik. Magnetisch spinnende Patienten im Spital leiten über zu den Individualisten und Kollektivistern im Quantenkosmos. Sie heissen Bosonen und Fermionen, und ihr Verhalten weicht von dem der «klassischen», nämlich grundsätzlich unterscheidbaren Objekten ab.

### II.1) Statistik und Quantenphysik

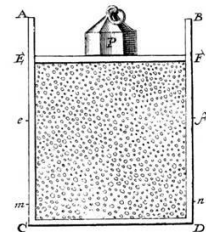
#### II.1.1 Das Grundprinzip

Das Grundprinzip ist vom Münzenwurf des Schiedsrichters zu Beginn eines Fussballmatches bekannt: «Kopf» und «Zahl» kommen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit  $w = 0.5 = 50\%$  vor. Das Ergebnis eines einzelnen «Experiments» ist zufällig. Lassen wir von fairen Schiedsrichtern viele Würfe durchführen, nähert sich die **beobachtete relative Häufigkeit** = günstige Fälle / mögliche Fälle der **theoretischen Wahrscheinlichkeit**. Dass 10mal «Kopf» kommt, ist sehr unwahrscheinlich, aber nicht unmöglich.

Das Ergebnis einer grossen Zahl von zufälligen Ereignissen besitzt einen **Erwartungswert**. Der Einzelfall ist mit grosser Wahrscheinlichkeit innerhalb einer **Schwankungsbreite** anzutreffen.

#### II.1.2 Statistik in der klassischen Physik

Die Figur rechts hat Daniel Bernoulli 1738 gezeichnet um den Gasdruck als Stosswirkung aller Gasteilchen zu erklären. In realistischen Fragestellungen tauchen  $10^{23}$  Gasteilchen auf. Es ist also unmöglich, mit Newtons Gesetzen das Verhalten jedes Teilchens einzeln vorherzusagen. Mit der statistischen Mechanik hingegen ist es möglich, bei einer bestimmten Temperatur den Erwartungswert der Geschwindigkeit der Gasteilchen und ihre Schwankung vorherzusagen. Daraus ergeben sich Energie und Gasdruck. Plancks Überlegungen zur Wärmestrahlung beginnen in diesem Umfeld. In der klassischen Physik steht Nichtwissen am Anfang der Statistik.



#### II.1.3 Quantenphysik wirkt auch in unserem Körper zufällig

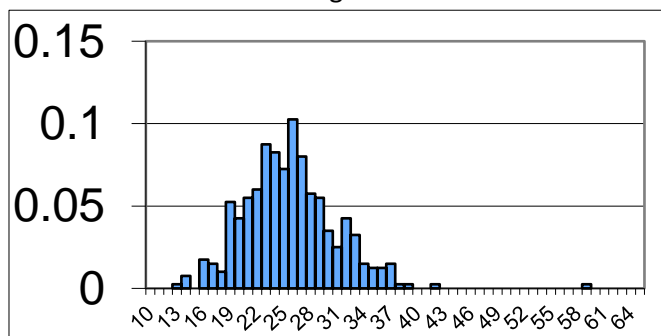


Die C-14-Zerfälle machen es zum Beispiel möglich, den «Özi» auf rund 3200 v. Chr. zu datieren, weil bekannt ist, dass die Wahrscheinlichkeit eines C-14-Atoms innerhalb von 5730 Jahren zu zerfallen, 50% beträgt. **Der Zerfall ist spontan**, ohne äussere Ursache. Zerfallszeitpunkt und -richtung des Betateilchens sind total dem quantenphysikalischen Zufall unterworfen.

Was man mit einem Nachweis- und einem Zählgerät direkt beobachtet, ist die Zahl der pro Zeit wegfliegenden Quantenobjekte (Alpha, Beta- oder Gamma) die

**Intensität  $I(t) \equiv -\Delta N / \Delta t. = - [N(t) - N(t+\Delta t)] / \Delta t.$**

In der Infinitesimalrechnung sind  $\Delta N$  und  $\Delta t$  beide unendlich klein. Die Infinitesimalrechnung liefert die



zweite Form des Zerfallsgesetzes mit der Aktivität einer Quelle, respektive die Intensität der abgegebenen Strahlung:

In einem konkreten Experiment wurden die Zerfälle pro Zeit viele Male gemessen und statistisch analysiert:

Mittelwert = 25.7; Standardabweichung = Schwankung =  $\pm 5.2$

In unserem Körper liefern sehr viele C-14

Atome (etwa  $10^{12}$  Atome) mit einer sehr kleiner Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit (ca.  $10^{-10} \text{ sec}^{-1}$ ) eine messbare Zerfallsrate (ungefähr  $I_0 = 100 \text{ sec}^{-1}$ ). Diese schwankt von Natur aus: mal nur 91, mal 108. Die Statistik sagt, die Schwankung (Standardabweichung) sei  $\pm \Delta I = \pm \sqrt{I}$ , also hier  $\pm 10 \text{ sec}^{-1}$ .

#### II.1.4 Der Zufall bei der spontanen Emission

Erst etwa 1930, nachdem man die Elektronenhülle quantenmechanisch verstanden hatte, wurde klar, dass die Quantenphysik auch den Atomkern und damit den radioaktiven Zerfall bestimmt. Einstein hat aber schon 1916 erkannt, dass angeregte Atome von  $\psi_2$  nach den Gesetzen des Zufalls in den Grundzustand  $\psi_1$  zurückfallen und Licht aussenden. Diese spontane Emission erfolgt innert Nanosekunden.

## II.2) Viel Quantenphysik im Spital: Der CT und das MRI

Schon 1895 erkannte Conrad Wilhelm Röntgen den medizinischen Nutzen der neuen Strahlen. Er verzichtete bewusst auf die Patentierung seiner Apparatur, denn er war der Auffassung, dass *seine Erfindungen und Entdeckungen der Allgemeinheit gehören und nicht durch Patente, Lizenzverträge und dergleichen einzelnen Unternehmungen vorbehalten bleiben dürften*. Bei der Entwicklung des Computer Tomographen in den 1970er Jahren war das anders. Patenteinnahmen mussten die kostspieligen Entwicklungen finanzieren, die zu weniger Strahlenbelastung, kontrastreicheren und erst noch dreidimensionalen Bildern führten. Die Quantenphysik spielt direkt beim Compton-Effekt an den Knochen usw. eine Rolle. Viel wichtiger aber ist, dass sie die Halbleiter steuert, die im „C“ stecken: ohne leistungsfähige Kleincomputer könnten sich nur Universitätsspitäler einen CT leisten.

MRI, magnetic resonance imaging, die Leistung, tönt eigentlich ganz sympatisch, sympatischer als **Kernspintomograph**, das Gerät. - Wenn das Gerät, mit dem man lädierte Bandscheiben usw. darstellen kann, so verschiedene Namen hat, muss es kompliziert sein. Seine Aufgabe ist, scheibenweise (tome) Bilder (graphie) des menschlichen Körpers zu erzeugen, indem es Magnetchen zum Mitschwingen (Resonanz) bringt. Es geht zurück auf die *nuclear magnetic resonance* (NMR) Apparate in den 1950er Jahren. Der Name hat den Weg aus den Physiklabors in die Medizin nicht geschafft, weil „nuclear“ negativ besetzt ist: „Strahlengefahr“. In Wirklichkeit gibt es beim MRI keine Strahlenbelastung - im Gegensatz zum CT. Die mitschwingenden Elementarmagnetchen sitzen schon in den stabilen Atomen der Patienten: seine Wasserstoffkerne. Und die gibt es in unserem Körper im Wasser der Körperflüssigkeiten, in den Eiweissen, Fetten usw. im Überfluss.

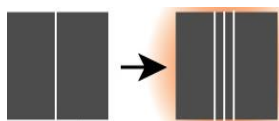


Das MRI enthält einen grossen, starken Magneten, der die Magnetchen im Körper ausrichtet, und einen UKW-Sender, der sie kurzzeitig mit energiearmen Quanten zum Mitschwingen bringt. Dann stellt „die Röhre“ auf Empfang um und findet mit tatkräftiger Unterstützung des Computers heraus, wo die Magnetchen wie schnell zurückkippen. - In diesem Kapitel werden wir uns mit der Quantenphysik der Magnetchen und auch mit der Quantenmechanik des Mitschwingens befassen.

## II.3) Atome im Magnetfeld – Zweierlei Elementarmagnetchen – Spin

### II.3.1 Der normale Zeeman-Effekt

Die Frage, was geschieht, wenn man Atome in ein Magnetfeld steckt, wurde schon aufgeworfen, bevor die Quanten das Licht der Welt erblickten. Hendrik Antoon Lorentz fand 1882, dass die Spektrallinien dreifach aufgespalten werden sollten. Pieter Zeeman konnte dies bald experimentell bestätigen. Der „normale Zeeman-Effekt“ musste auch mit Bohrs und den späteren Atommodellen erklärt werden können. Diese liefern neben den Energie-Quantenzahlen  $n = 1, 2, 3$  usw. auch die Drehimpulsquantenzahlen  $l$  und die sogenannten **magnetischen Quantenzahlen**. Sie bestimmen den Drehimpuls respektive die  $z$ -Komponente des Drehimpulses des Orbitals. Beispielsweise für  $n = 2$  darf sie im  $p$ -Orbital die drei Wert  $+1, 0$  und  $-1$  annehmen. Wir können uns das Orbital in beiden Richtungen oder gar nicht um die durch das Magnetfeld vorgegebene  $z$ -Richtung rotierend vorstellen. Wie Ampère vor über 200 Jahren gefunden hat, entspricht jeder **rotierenden Ladungsverteilung** ein Elementarmagnetchen. In unserem Beispiel kann das Magnetchen sich parallel, antiparallel oder gar nicht ausrichten und so die Gesamtenergie des Atomelektrons erhöhen, erniedrigen oder unverändert lassen. Das gibt drei Spektrallinien. In Orbitalen mit grösseren  $n$  und  $l$  findet man 5, 7 usw. Werte. - Mehr dazu weiter unten.



### II.3.2 Der anomale Zeeman-Effekt

Schon 1898 hatte man entdeckt, dass sich gewisse Spektrallinien im Magnetfeld nicht in drei, sondern in zwei, vier oder eine andere gerade Anzahl aufspalten: das passte nicht ins Schema, schien anomal. Verschiedene Physiker bearbeiteten das Problem *dieser klassisch nicht beschreibbaren Zweideutigkeit des Valenzelektrons*, wie Wolfgang Pauli schrieb. Als er 1923 in Kopenhagen von einem Kollegen nach dem Grund seiner Sorgenfalten gefragt wurde, antwortete er: *Wie kann man glücklich sein, wenn man über den anomalen Zeeman-Effekt nachdenkt?* Pauli war sehr nahe an der (Er)-Findung des Elektronen-Spins. Er erfand zur Beschreibung des anomalen Zeeman-Effekts eine vierte

Quantenzahl mit nur zwei Werten. Doch den letzten Schritt zum Elektronenspin machten die zwei noch jüngeren Physiker Goudsmith und Uhlenbeck.

**Wolfgang Pauli (1900-1958)** ist ein Wunderkind der Physik. Schon als 20-jähriger und noch ohne Abschluss darf er den Artikel über die Relativitätstheorie für das Handbuch der Physik schreiben. Er wird zum scharfsinnigen „Gewissen der Physik“, ist aber auch so scharfzüngig, dass seine Kollegen ihn als „Geißel Gottes“ fürchten. „Das ist so schlecht, es ist nicht einmal falsch,“ soll er über eine Arbeit gesagt haben. Noch 1958 als Professor an der ETH macht er einen bissigen Kommentar zu Heisenbergs „Weltformel“. Er zeichnet ein leeres Viereck und schreibt dazu: „Ich kann malen wie Tizian. Nur ein paar technische Details fehlen.“ Pauli ist eine Persönlichkeit mit vielen Seiten. Er steht in intensivem Austausch mit C. G. Jung und man glaubt, Jung habe viele von Paulis Träumen gedeutet.



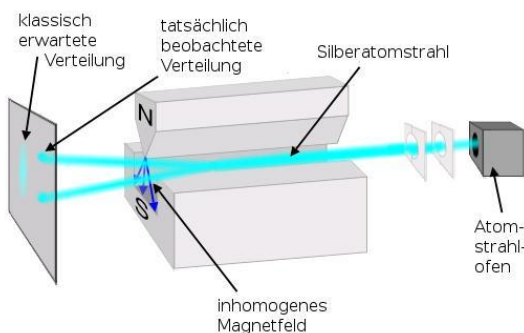
**II.3.3 Der Elektronenspin**

Zur Lösung des Rätsels mit dem anomalen Zeeman-Effekt schlugen Samuel Goudsmith, damals Zeemans Assistent in Amsterdam, und George Uhlenbeck 1925 vor, dem Elektron **einen Eigendrehimpuls**, englisch **spin**, zuzuschreiben. Der Begriff ist aus dem Tennis bestens bekannt. Auch die Erde hat durch ihren Umlauf um die Sonne einen Drehimpuls und zusätzlich durch die Rotation um ihre Achse einen Eigendrehimpuls. Reine Quantenphysik ist, dass das quasi punktförmige Elektron einen Spin besitzt.

Goudsmith sagte später: *Our luck was that the idea arose just at the moment when we were saturated with a thorough knowledge of the structure of atomic spectra.* Und Uhlenbeck fand, *It was then that it occurred to me that [...] Paulis forth quantum number must mean that the electron [...] must be rotating.* Die Idee war kühn, aber Ehrenfest, Goudsmiths Chef in Den Haag, meinte: *Sie sind beide jung genug, um sich eine Dummheit leisten zu können.* Pauli hatte im Jahr zuvor Ralph Kronig noch davon abgehalten, etwas zum Spin zu publizieren. Kronigs Idee sei *indeed very clever but of course has nothing to do with reality.* Und „das Gewissen der Physik“ täuschte sich weiter: Bohr hatte in Holland den Spin kennen gelernt und stoppte auf dem Weg nach Kopenhagen bei Pauli in Berlin und schwärmte, wie sich nun der gordische Knoten der komplizierten Spektren löse. Doch Pauli befand sarkastisch: *Eine neue Kopenhagener Irrlehre.* Ein Argument gegen den Elektronenspin lieferten die Werte der zugehörigen **halbzahligen** Quantenzahlen  $+\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$ . Das war **klassisch nicht beschreibbar** und widersprach Paulis Anschauung.



Ein schlagendes Argument für den Spin hätte der Versuch geliefert, den **Otto Stern und Walter Gerlach** schon 1922 mit einem Strahl von Silber-Atomen durchführten. Klassisch hätte der Strahl im inhomogenen Magnetfeld sich einfach in der z-Richtung aufweiten müssen. Das Experiment lieferte aber zwei Flecken. 1922 konnten Stern und Gerlach ihr Experiment nur „falsch“ erklären, weil sie den Spin noch nicht kannten.



Nach der Entdeckung und Anerkennung des Spins mussten sie den Artikel *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld* neu schreiben. Vielleicht hat sich Otto Stern an den Irrtum beim „Üetlichswur“ erinnert: Als Bohrs Modell 1914 bekannt wurde, war er an der ETH. Bei einem Spaziergang auf den Uetliberg versprachen er und sein Besucher Max von Laue sich: *Wenn sich dieses verrückte Modell Bohrs als richtig herausstellte, würden sie die Physik aufgeben.*

Pauli wurde später zum Verfechter des Spins und erfand 1927 die Spin-Matrizen, mit denen die Zustandsfunktion  $\psi$  quasi durch eine vierte Dimension ergänzt wird. Diese Dimension hat allerdings nur zwei Punkte  $+\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$  und keinen Wert im Ursprung. Der Spin erwies sich als sehr wichtig bei den verschiedenen Arten von Magnetismus: Ferromagnetismus, Paramagnetismus usw.

### II.3.4 Alle Quantenobjekte besitzen einen Spin

Weitere Experimente in der Art, wie es Stern und Gerlach durchgeführt haben, zeigen, dass allen Quantenobjekten ein Spin zugeordnet werden muss. Der macht sich bei Stößen, bei magnetischen Untersuchungen usw. bemerkbar. Hinsichtlich des Spins zerfallen die Quantenobjekte in zwei Klassen:

- **Fermionen** (nach dem Italiener Enrico Fermi, 1901-1954) besitzen einen halbzahligen Spin, jeweils mit positiver oder negativer Komponente in der z-Richtung; Kurzversionen „spin-up“ und „spin-down“:

Spin  $\frac{1}{2}$  besitzen: Elektron, Proton, Neutron, Quarks usw. und ihre Antiteilchen Positron, Antiproton usw. Spin  $\frac{3}{2}$  besitzen supersymmetrische Objekte.

- **Bosonen** besitzen ganzzahligen Spin: (nach dem Inder Satyendranath Bose, 1894-1974, der seinen Text Einstein schickte, nachdem eine englische Zeitschrift ihn abgelehnt hatte. Einstein liess ihn auf Deutsch übersetzen und publizieren. → Mehr in II.7)

Spin 0 besitzen: Higgs-Boson, He-4 Kern, He-4 Atom usw.; Spin 1 besitzen: Photon, Gluon usw.; Spin 2 besitzt das Graviton.



Enrico Fermi

#### Alle Quantenobjekte besitzen einen Spin.

In **zusammengesetzten Objekten** werden die Spins der einzelnen Quantenobjekte vektoriell addiert.

Das H-Atom hat Spin 0, da die Spins von Proton und Elektron bei minimaler Energie aufheben.

Das Helium-4 Atom besitzt je zwei Protonen und Neutronen im Kern mit je entgegengesetztem Spin, total 0. Dazu die ebenfalls entgegengesetzten Spins der beiden Elektronen. Zusammen 0.

Das H<sub>2</sub>-Molekül besitzt ebenfalls den Gesamtspin 0. Es gibt aber zwei physikalisch unterscheidbare Versionen: Im Ortho-Wasserstoff-Molekül sind beide Protonen- und beide Elektronenspins je parallel, aber entgegengesetzt; im Para-Wasserstoff-Molekül sind zweimal Protonen- und Elektronenspin antiparallel.

### II.4) Quantenstatistik light - Kollektivisten und Individualisten (mehr Quantenstatistik → Kapitel 3)

Sobald mehrere Quantenobjekte zusammenwirken, ist ihr statistisches Verhalten von Bedeutung.

#### Quantenobjekte - meist einfach „Teilchen“ genannt - besitzen keine Individualität!

Das Quantenobjekte ununterscheidbar sein sollen, steht in starkem Widerspruch zu unseren Vorstellungen. Ununterscheidbarkeit spielte erstmals bei Max Plancks Untersuchung der Wärmestrahlung eine Rolle. Erwin Schrödinger (→ PANORAMA 1925) schreibt 1950: *Manche ältere Philosophen würden, wenn ihnen der Fall [der Quantenobjekte, HPD] vorgelegt werden könnte, sagen: eure neumodischen Atome bestehen überhaupt aus keinem Stoff, sie sind reine Form.*

Schrödinger erläutert den Sachverhalt am einfachsten Beispiel mit zwei Quantenobjekten in den drei verschiedenen Statistiken. 3 verschiedene Preistypen repräsentieren die klassischen Objekte, die Bosonen und die Fermionen. Man hat jeweils zwei Preise, die den drei Preisträger/innen Anna, Beat und Christine zugesprochen werden. Die Preisträger/innen A, B und C vertreten die Zustände.

**0) Die klassische oder Boltzmann-Statistik** beruht auf *unterscheidbaren* Preisen: Gold und Silber. Es gibt 9 Verteilmöglichkeiten: Die Goldmedaille an A, B oder an C *und* je die Silbermedaille an A, B oder an C. - *Beispiel*: Verteilung von Stickstoffmolekülen auf Energieniveaus (bei bestimmter Temperatur).

**1) Für Kollektivisten: Bose-Einstein-Statistik** - „Photonen leben gesellig.“

Bei Bosonen sind zwei *identische* Medaillen zu verteilen. Nun gibt es nur noch **6** Möglichkeiten: 3 „gerechte“ mit zwei Sieger/innen: ABO, AOC, OBC *oder* 3 „ungerechte“ Möglichkeiten mit einem Doppelsieg. ↔ Die drei Zustände können also gar nicht oder einfach oder doppelt besetzt sein ↔ Unendlich viele Bosonen können den gleichen quantenphysikalischen Zustand einnehmen. - *Beispiele*: Viele Photonen bilden einen kohärenten Laser-Wellenzug; viele Cooper-Paare aus 2 Elektronen mit entgegengesetztem Spin liefern die Supraleitung im MRI-Elektromagneten (Bild nebenan).



**2) Für Individualisten: Fermi-Dirac-Statistik** - „Elektronen leben einsam.“

Statt Medaillen sind bei Fermionen *identische Mitspielplätze* in einem begehrten Spiel zu verteilen. Es gibt nur noch **3** Möglichkeiten: AB=BA *oder* AC=CA *oder* BC=CB. ↔ Die drei Zustände sind einfach besetzt. ↔ In jedem quantenphysikalischen Zustand darf nur ein Fermion sein. ↔ Die Zustände AB und BA usw. sind identisch. Dies führt zu den «Austauschkraften» im He oder im H<sub>2</sub>. (→ MINT III)

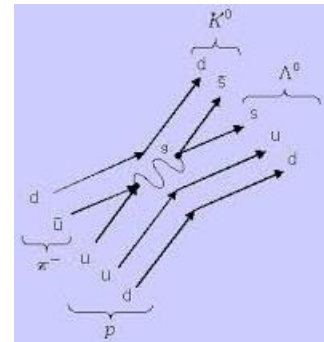
*Beispiele für Individualisten:* Elektronen in Atomen, Molekülen und in Energiebändern der Kristalle; Neutronen in Neutronensternen: Sie sorgen für eine minimale Grösse trotz der Gravitationskraft.

**II.5) Quantenfeldtheorien - Quantenphysik im Atomkern und bei der „Teilchenphysik“**

George Gamow hat den Alpha-Zerfall mit dem Tunneleffekt erklären können. Enrico Fermi gelang es 1933 den Beta-Zerfall mit dem Neutrino, einem hypothetischen neuen Teilchen zu erklären. Der Gamma-Zerfall kann mit dem Schalenmodell der Atomkerne erklärt werden. Dieses hat eine gewisse Ähnlichkeit mit Bohrs Modell, ist aber viel anspruchsvoller, weil der Atomkern kein Zentrum besitzt und die „magischen Zahlen“ von Protonen und Neutronen gesondert betrachtet werden müssen. Es wurde von Dimitri Iwanenko vorgeschlagen und 1949 durch Maria Goeppert-Mayer (AGB 3, Goeppert) und Hans Jensen ausgearbeitet. Maria Goeppert war eine der Frauen, die bei Max Born doktorierten. 1930 mit ihrem Mann in die USA ausgewandert, konnte sie ihr Talent pflegen. Sie erhielt als erste Frau einen Nobelpreis für eine Anwendung der Quantenphysik.

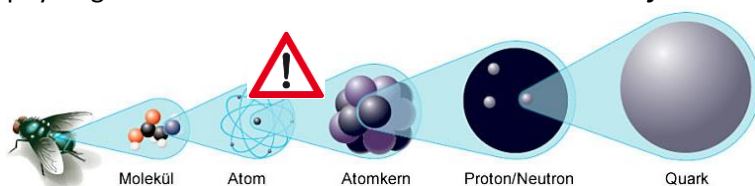
Mit immer leistungsfähigeren Beschleunigern gelingt es, laufend neue Quantenobjekte zu erzeugen und mit dem Anfang des Universums in Beziehung zu setzen. Leider spricht man statt von „Hochenergie-“ oft von „Teilchenphysik“. Der Wellenaspekt aller Quantenobjekte ist in dieser Sprechweise verloren!

In den 1960er Jahren wird die QED zum Modell für andere Quantenfeldtheorien. In ihnen geht es nicht mehr um die elektromagnetischen Kräfte, sondern beispielsweise um die starke Kraft, die in Atomkernen anziehend zwischen zwei Neutronen wirkt. Diese Theorie heisst **Quantenchromodynamik** QCD. Die QCD hat mit realen Farben nichts zu tun. Weil aber statt positiver und negativer Ladungen dreierlei „Ladungssorten“ zu behandeln sind, hat man zu deren Benennung auf die drei Grundfarben rot, grün und blau zurückgegriffen. In der QCD stellen die Quarks das Pendant zu den Elektronen und die Gluonen das Pendant zu den Photonen dar. Im Feynman-Graph rechts treffen ein aus drei Quarks bestehendes Proton und ein aus einem Quark-Antiquark-Paar bestehendes  $\pi$ -Meson aufeinander. Sie wechselwirken über ein virtuelles Gluon und formieren sich neu zu zwei seltsamen Teilchen, einem K-Meson und einem Lambda-Teilchen, die beide neutral sind. Im Standardmodell der Teilchen(!)-Physik gibt es gewisse Grössen, die erhalten bleiben, beispielsweise die elektrische Ladung. Beim dargestellten Prozess bleibt auch die Hadronen- und die Mesonenzahl erhalten.



**II.6) Die Welt und was sie zusammenhält. – Etwas Elementarteilchenphysik**

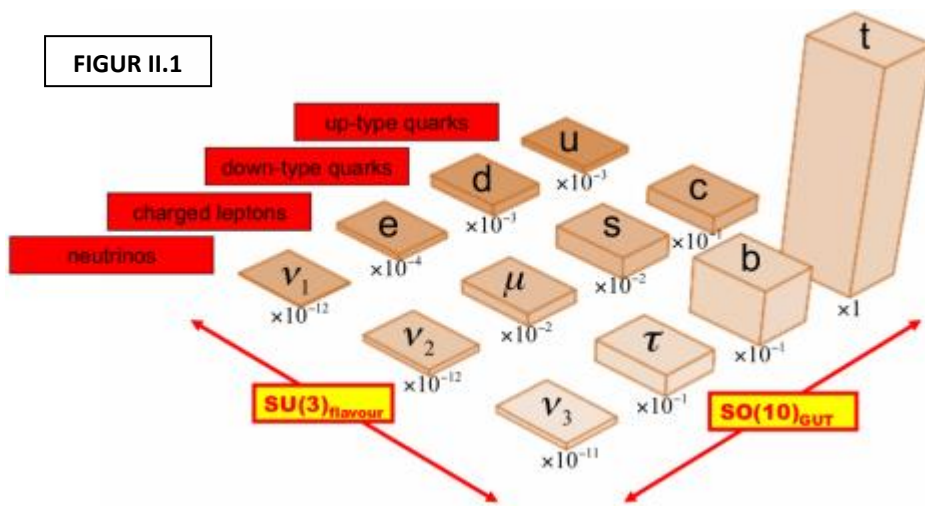
Im Grossen und Ganzen ist die Materie, aus der die Welt besteht, stabil. Unten ist ein Überblick vom Lebewesen bis zum Quark. Die Grafiker der Nobel-Stiftung haben sich dabei wenig um die Quantenphysik gekümmert ... Alle Informationen über den **Aufbau der Materie** hat man im Prinzip durch die



Streuexperimente gewonnen, die in der nächsten Darstellung zusammengefasst sind. Dabei wird die Frage aufgeworfen, ob die Quarks elementar seien. Diese Frage kann

nur durch Beschleuniger mit noch höherer Energie beantwortet werden. Von grundsätzlichem Interesse ist die Gesamtheit der stabilen und der instabilen Materie. Neben den beiden

Rutherford, 1908 Entdeckung des Atomkerns	Hofstadter, 1956 Ausdehnung des Protons	Friedman, Kendall, Taylor, 1962 Entdeckung der Quarks	Seit 1962 Aufbau der Protonen	Sind Quarks elementar ?
Rutherford, 1908 Entdeckung des Atomkerns	Hofstadter, 1956 Ausdehnung des Protons	Friedman, Kendall, Taylor, 1962 Entdeckung der Quarks	Seit 1962 Aufbau der Protonen	Sind Quarks elementar ?

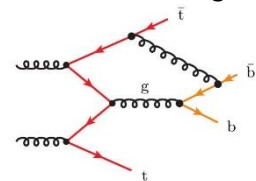


Quarks, die die stabile Materie aufbauen (up und down), gibt es noch vier weitere Quarks, die sehr viel schwerer sind als das u- und das d-Quark. **Die Quarks** werden in drei Familien 1 (up und down), 2 (charm und strange) und 3 (top und bottom) gegliedert. Im Bild sind sie mit ihren

unterschiedlichen Massen grafisch dargestellt.

Jede Quark-Familie hat einen leichten Verwandten, der auch zum Aufbau der Materie beiträgt. Elektron, Müon und Tauon werden als **Leptonen** bezeichnet. Und jede Quark-Familie hat noch einen superleichten Verwandten in Form eines **Neutrinos**.

All diese Objekte, die die Materie ausmachen, werden durch die **vier fundamentalen Kräfte oder Wechselwirkungen** zusammengehalten, die mit Feynman-Graphen dargestellt werden, wie nebenan. Zu jeder Kraft gehört ein



Austauscheteilchen. Die elektromagnetische Kraft wird vom vertrauten Photon in der Art und Weise «vermittelt», die die QED mathematisch präzisiert.

Kraft	Boson	Ladung	Reichweite	Stärke
Gravitation	Graviton	Masse	unendlich	$10^{-41}$
elektromagnetisch	Photon	elektrisch	unendlich	1/137
schwach	$W^+ W^- Z^0$	schwach	$10^{-17}m$	$10^{-14}$
stark	8 Gluonen	Farbe	$10^{-15}m$	1-10

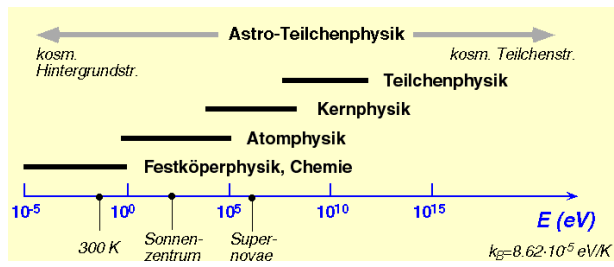
In der Tabelle unten sind die vier Wechselwirkungen zusammengefasst. Die Gravitation kennt man am längsten. Aber das Graviton ist immer noch mysteriös. Die Quarks

werden durch die sogenannte starke Kraft zusammengehalten. Dabei können 8 verschiedenen **Gluonen** (to glue = kleben) beteiligt sein. Beim Beta-Zerfall und ähnlichen Prozessen macht sich die schwache Wechselwirkung bemerkbar. Sie ist mit der elektromagnetischen Wechselwirkung verwandt, wird aber nicht durch das Photon, sondern durch drei verschiedene Quantenobjekte vermittelt. Die Austausch-**teilchen** werden manchmal auch «Botenteilchen» genannt.



Alle Wechselwirkungsteilchen sind Bosonen. Sie haben einen ganzzahligen Spin.

Im Schema rechts sind die Familien und die Wechselwirkungen nochmals grafisch zusammengefasst. In Figur II.1 sind mit den roten Pfeilen gewisse Symmetrieeigenschaften (z. B. SU3) dargestellt, die mit gewissen Erhaltungsgesetzen verknüpft sind. Bekannt ist die Ladungserhaltung. In SU3 gilt zusätzlich die «Flavourerhaltung». SO10 gehört zur «grand unification theory» GUT.



Zurück in den Alltag mit dem letzten Diagramm! Es zeigt, dass in verschiedenen Gebieten mit verschiedenen Energien verschiedene Spezialisten zum Zug kommen.

Die Astro-Teilchen-Physik beschäftigt sich mit dem Kosmos und seiner Entwicklung. Was im Diagramm nicht zum Ausdruck kommt: Auch die Astronomie benützt die Erkenntnisse der

Quantenphysik in allen Größenordnungen.

**II.7 Bose-Einstein-Kondensation**

*Eine Art «Quanten-Volkstanz»*

*Ich habe es gewagt, Ihnen den beiliegenden Artikel zu Ihrer Verwendung zu senden. Ich möchte gerne Ihr Urteil darüber kennenlernen. Sie werden sehen, dass ich den Koeffizienten (...) im Planckschen Gesetz unabhängig von der klassischen Elektrodynamik abgeleitet habe. (...) Wenn Sie der Auffassung sind, dass das Manuskript es wert ist publiziert zu werden, wäre ich dankbar, wenn Sie eine Veröffentlichung desselben in der Zeitschrift für Physik veranlassen könnten.*



**S. N. Bose**

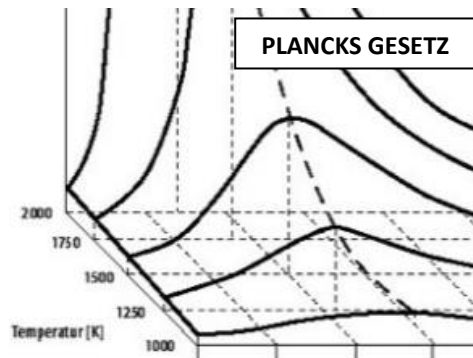
Das schrieb Satyendra Nath Bose 1924 – noch bevor Heisenberg das Quantenei gelegt und Schrödinger seine Gleichung gefunden hatte – aus Dakka (Bangladesh) an Albert Einstein in Berlin. *Obwohl ich als ganz Fremder an Sie herantrete, tue ich dies ohne Scheu, weil wir alle durch die Lektüre Ihrer Schriften zu Ihren Schülern geworden sind. Ich weiß nicht, ob Sie sich noch daran erinnern, dass jemand aus Kalkutta an Sie herantrat und um die Erlaubnis zur Übersetzung Ihrer Schriften ins Englische bat. Sie gaben dazu Ihre Zustimmung und das Buch ist mittlerweile im Druck erschienen.*

Einstein: *Der Inder Bose hat eine schöne Ableitung des Planckschen Gesetzes samt Konstante auf Grund der losen Lichtquanten gegeben.* Er übersetzte sie, sandte sie zum Drucken ein und erreichte, was *The Philosophical Magazine* dem Inder verweigert hatte: die Publikation einer weitreichenden Idee.

Plancks Gesetz stand am Anfang der Quantenphysik (Abschnitt → 1.2). Es gibt die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung pro Wellenlänge als Funktion von Wellenlänge und Temperatur des Strahlers an. Im Diagramm ist die Wellenlänge nach rechts abgetragen. Natürlich kann man dank  $c = \lambda f$  auch mit der Frequenz statt der Wellenlänge arbeiten. Die Funktionsgleichung lautet

$$\rho(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

In dieser Form erkennt man die Lichtquanten  $E = hf$ . Neben der Lichtgeschwindigkeit  $c$  taucht auch noch eine dritte Naturkonstante auf, Boltzmanns Konstante  $k$ . Sie spielt in der statistischen Wärmelehre eine grundlegende Rolle.



Beispielsweise ist der Erwartungswert der Bewegungsenergie eines klassischen Teilchens eines idealen Gases bei der Temperatur  $T$ :  $E_{kin} = 3/2 kT$ . Satyendra Nath Bose betrachtete nun die Wärmestrahlung analog als ein **ideales Gas aus Photonen**. Das war sehr kühn. Der Physiker Abraham Pais schreibt dazu in seiner Einstein-Biographie: *Seit Planck 1900 das Quant eingeführt hatte, hat es meiner Meinung nach keinen so erfolgreichen Schuss ins Ungewisse gegeben.* – Welche Beute lieferte dieser Schuss?

Einstein hat die Arbeit von Bose noch im gleichen Jahr ergänzt und dabei vier Gesetzmässigkeiten für das heute so genannte Bose-Einstein-Gas (aus Photonen oder ähnlichen Quantenobjekten) gefunden: (1) (...) *eine gewisse [statistische] Hypothese über die gegenseitige Beeinflussung der Moleküle [Objekte des Bose-Einstein-Gases] von vorläufig ganz rätselhafter Art.*

- (2) Die Ununterscheidbarkeit der Quantenobjekte, die das Bose-Einstein-Gas bilden.
- (3) Die Nichterhaltung der Photonenzahl. Erzeugung und Verwandlung von Licht ist leicht möglich, im Gegensatz zu Erzeugung und Verwandlung von Elektronen.
- (4) Der 3. Hauptsatz der Thermodynamik gilt für ein Bose-Einstein-Gas. Seine Entropie (Mass für die innere Unordnung eines Systems) ist am absoluten Nullpunkt = 0.

An dieser Stelle ist nur der Punkt (2) wichtig. Er wird im Modul 4 wieder aufgenommen.

**QUANTENOBJEKTE SIND UNUNTERSCHIEDBAR.  
IM GEGENSATZ ZU KLASSISCHEN OBJEKTEN KÖNNEN SIE NICHT NUMMERIERT WERDEN.**

Diese Eigenheit der Quantenwelt gilt nicht nur für die «Moleküle» des Bose-Einstein-Gases, sondern universell, also auch für Elektronen, Neutronen usw. Wir haben auf diese Eigenheit schon im Abschnitt 3.3 bei der chemischen Bindung hingewiesen. Dort haben wir einfach gesagt: Das  $\Psi_{\text{Molekül}}$  berücksichtigt, dass **Elektronen ununterscheidbar** sind. Zu dieser Ununterscheidbarkeit gehört *die gegenseitige Beeinflussung von vorläufig ganz rätselhafter Art*. Weil wir sie nicht direkt wahrnehmen können, scheint die Beeinflussung auch im 21. Jahrhundert noch rätselhaft.

Im Unterschied zu einem idealen Gas aus klassischen Objekten, kann ein ideales Gas aus Bose-Einstein-Quantenobjekten sich verflüssigen, zu einem Bose-Einstein-Kondensat werden. Einstein schildert das seinem Freund aus der Zeit an der Universität Prag, Paul Ehrenfest, Professor in Leiden, folgendermassen:



**P. Ehrenfest**

*Von einer gewissen Temperatur an 'kondensieren' die Moleküle(\*) ohne Anziehungskräfte, d. h. sie häufen sich bei der Geschwindigkeit Null. Die Theorie ist hübsch, aber ob auch etwas Wahres daran ist? (\* = Objekte des BE-Gases)*

In Leiden konnte man flüssiges Helium herstellen. Dort hatte man 1911 entdeckt, dass Quecksilber bei 4.1 K den elektrischen Widerstand verliert (Supraleitung). Einstein glaubte damals, dass Wasserstoff, Helium und das Elektronengas in Metallen experimentelle Kandidaten für diese Kondensation sein könnten. Doch bald fand Pauli sein Ausschlussprinzip. Darauf entdeckten Enrico Fermi (→

PANORAMA 1950) und Adrien Dirac, dass Elektronen, Neutronen usw. eine zweite Sorte von ununterscheidbaren Quantenobjekten bildeten, die man heute Fermionen nennt (→ 3.4.1).

Photonen, Elektronen-Paare, Helium-Atome und andere Quantenobjekte mit ganzzahligem Spin (→ Kapitel 4) sind **Bosonen**. Bosonen sind Kollektivisten. Im Gegensatz zu Fermionen wollen sie gerne mit ihresgleichen im gleichen Zustand sein:  $\varphi_{\text{Bosonen}} = \varphi_{\text{Boson 1}} \cdot \varphi_{\text{Boson 2}} \cdot \varphi_{\text{Boson 3}} \cdot \varphi_{\text{Boson 4}} \cdot \varphi_{\text{Boson 5}} \text{ USW.}$

In 1 Gramm Helium hat man sehr viele Bosonen. Wenn man das Gas abkühlt, fällt ein Atom in den Grundzustand, der energetisch am tiefsten liegt. Bei weiterem Abkühlen folgen alle anderen nach, bis sie alle als **Bose-Einstein-Kondensat** (BEK) vorliegen. Ihre  $\varphi_{\text{Boson}}$ -Wellen schwingen dann kohärent. Dieser «Quanten-Volkstanz» gibt zu allerlei merkwürdigem Verhalten Anlass:

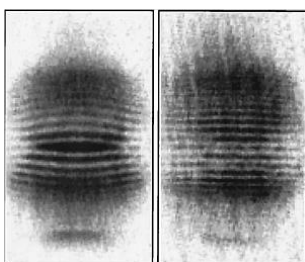
(1) Unterhalb von 2.1 K wird 8% des Heliums suprafluid. Dieses kann dann in einem Gefäss die Wände hochkriechen und durch allerlei Ritzen dringen, die vorher dicht waren und nun ein Supra-Loch zeigen. Restkräfte zwischen den neutralen Atomen verhindern, dass das He zu 100% suprafluid wird.

(2) Viele Stoffe werden bei tiefen Temperaturen supraleitend. Technisch interessant sind solche, die man schon mit flüssiger Luft in den supraleitenden Zustand versetzen kann. 1986 entdeckten Georg Bednorz und Karl Alex Müller am IBM-Forschungslabor in Rüschlikon, dass  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  schon bei 93 K supraleitend wird, etwas, das Theoretiker als unmöglich erklärt hatten. Allerdings ist dieser Keramik-Stoff spröde und hält keine zu grossen Stromstärken aus. Für bessere Materialien gibt es ganz sicher weitere Nobelpreise. Nicht nur wegen des Nutzens, sondern auch deshalb, weil die Theorie bisher nur grob sagen kann, dass in **Hochtemperatur-Supraleitern** je zwei Elektronen zusammen ein Boson mit Gesamtspin 0 bilden.



**G. Bednorz - A. Müller**

(3) Das Bild ist nicht umwerfend, der Aufwand allerdings schon: Wolfgang Ketterle gelang es – wie anderen auch – ein BEK aus Natrium-Atomen (Gesamtspin 0) herzustellen. Die Breite im Bild beträgt etwa 20  $\mu\text{m}$ . Die Temperatur ist weniger als 1  $\mu\text{K}$ . Ketterle gelang es zudem, das Kondensat in zwei Teile zu teilen und diese anschliessend in einem Raumbereich zur Überlagerung zu bringen. Die Bilder zeigen ohne Doppelspalt usw. direkt die Interferenzen der Materiewellen. Dafür 2001 erhielt er den Nobelpreis. Bekannt wurde Ketterle in den Medien dafür, dass er als Marathon-Läufer die Rennschuhe nach Stockholm mitnahm.



**Bose-Einstein-Kondensat zeigt Interferenzen**



## II.8 Die Schrödinger-Gleichung

### II.8.1 Schrödingers Geniestreich

Erwin Schrödinger schätzte den Sport und hielt seine Vorlesung im Sommer auch mal im Zürichsee-Bad am Mythenquai ab. Die Gleichung, die ihm den Nobelpreis einbrachte, erfand er in den Skiferien über die Neujahrstage 1925/1926 in Arosa, in der Pension FRISIA. Er kannte sie aus früheren Lungen-Kuraufenthalten.



In 2.5.2 haben wir bereits erwähnt, dass er sich auf Anregung von Einstein mit de Broglies Vorstellung *d'une onde réelle associée* beschäftigte. Wie jede andere Welle in der Physik, müsste auch die  $\psi$ -Welle einer Gleichung gehorchen. Die elektromagnetischen Wellen beispielsweise gehorchten den Gesetzen des Elektromagnetismus, Erdbebenwellen den Gesetzen der Elastizität von Gestein usw. Im Bereich der Quantenphysik gab es aber noch gar keine grundlegenden Gesetze, die man in die Form einer Wellenbedingung hätte bringen können!



Die Gleichung, die in der Artikelserie *Quantisierung als Eigenwertproblem* die zentrale Rolle spielt, kann nicht auf irgend einer Grundlage hergeleitet werden, **sie liefert eine neue Grundlage!** Als Einstein sie kennenlernt schreibt er Schrödinger: *Der Gedanke Ihrer Arbeit zeugt von ächter Genialität.*

Wir verstehen das Geniale bereits – zumindest ansatzweise:

Wir verstehen das Geniale bereits – zumindest ansatzweise:

- (1) Schrödinger erfindet die Wellenfunktion  $\psi$ , die das Wellige und das Körnige in der Wahrscheinlichkeit  $w = \psi^2$  verbindet, wie Born ein halbes Jahr später entdeckt.
- (2) Schrödinger erfindet die Gleichung, der alle  $\psi$  gehorchen müssen, indem er die bereits bekannten Materiewellen von de Broglie so erweitert, dass diese zu einem Spezialfall werden.
- (3) Schrödingers Wellenfunktionen  $\psi$  legen einen Schleier so über das Erkennbare, dass sie die Unbestimmtheitsrelationen, die Heisenberg ein Jahr später findet, bereits beinhalten.

Wir starten behutsam. Wir betrachten die Gleichung nur in einer Dimension, was die Mathematik wesentlich vereinfacht, aber die Physik nicht einschränkt. Und wir betrachten nur die stationäre Gleichung, die zeitlich unveränderliche Zustände beschreibt. Wir verschieben damit Veränderungen und die wesentliche Grösse «Zeit» auf einen zweiten Teil → in Modul 4.

Für die **physikalische Grundidee** der Schrödingergleichung rufen wir uns den Gasplaneten aus → 2.5.1 in Erinnerung und argumentieren mit Energien statt mit Kräften: Der Gasdruck, der die Tendenz zur Ausdehnung bewirkt, stammt von der Bewegung, die mit der Bewegungsenergie und dem Wellenaspekt verbunden ist. Diesem entgegen wirkt die Anziehungskraft, die mit der Lageenergie und dem Teilchenaspekt verbunden ist. Schrödingers neue Gleichung sagt:

$$\text{kinetische Energie (mit } p \text{ und } \psi) + \text{potentielle Energie (mit } e \text{ und } \psi) = \text{Gesamtenergie (mit } \psi)$$

Die Schrödinger-Gleichung in einer Dimension für einen stationären Zustand lautet konkret:

Erwin Schrödinger 1926:	$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \cdot \psi''(x) + E_{pot}(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x)$	(3.4)
-------------------------	---	-------

Man sieht sofort, dass die potentielle Energie und die Gesamtenergie in dieser Gleichung so auftauchen, wie wir es erwarten. Der *ächt geniale Gedanke* steckt in der merkwürdigen Form der kinetischen Energie, die – wen wundert's – auch Plancks Konstante  $h$  enthält:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \text{«übersetzen» in} \quad -\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \cdot \text{zweite Ableitung}$$

Schrödingers Gleichung ist eine **Differentialgleichung**. Die Lösungen dieser Gleichung sind nicht Zahlen, sondern Funktionen  $\psi(x)$ . Diese Funktionen müssen je nach Situation noch zusätzliche Bedingungen erfüllen. Wir lernen sie nun in ein paar Beispielen kennen.

### II.8.2 Schrödinger für den Potentialtopf

Im Innern des Potentialtopfs, den wir in 3.1.4 betrachtet haben, wirkt keine Kraft. Das Quantenobjekt ist frei. Das bedeutet, dass es keine potentielle Energie gibt und der Term  $E_{\text{pot}}$  in der Schrödinger-Gleichung wegfällt.

Schrödinger-Gleichung für ein freies Quantenobjekt: 
$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \cdot \psi''(x) = E \cdot \psi(x) \quad (3.5)$$

Eine Lösung haben wir in 3.1.3 vorweggenommen:  $\psi_{1\pm}(x) = \pm C \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ .

Andere Lösungen lauten:  $\psi_{1\pm}(x) = \pm C \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)$  oder  $\psi_{2\pm}(x) = \pm C \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$  usw.

Die Sinus-Lösungen erfüllen zusätzlich die Randbedingungen  $\psi(0) = \psi(b) = 0$ , welche die Cosinus-Lösungen nicht erfüllen würden.

Wenn wir irgend eine von diesen Funktionen in (3.5) einsetzen, liefert die 2. Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion samt dem erwünschten Minus-Zeichen. Wir überlassen der Mathematik zu beweisen, dass diese Sinus- und Cosinus-Funktionen die einzigen möglichen Lösungen sind.

Die zweimal auftretende innere Ableitung liefert einen Faktor  $\left(\frac{\pi}{b}\right)^2$  oder  $\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$  usw.

Nach der Division durch die Funktion, liefert (3.5) die Energien der Zustände:

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{8mb^2} \text{ oder } E_2 = \frac{4\hbar^2}{8mb^2} \text{ oder } E_3 = \frac{9\hbar^2}{8mb^2} \text{ usw. und das Spektrum } \Delta E_{12} = \frac{3\hbar^2}{8mb^2} \text{ usw.}$$

In 3.1.4 haben wir bereits Abschätzungen zu den Schwankungen von  $x$  und  $p$  gemacht. Wir fanden:  $\Delta x \approx b/2$  und  $\Delta p \approx h/2b$ . Heisenbergs Produkt liefert:  $\Delta x \cdot \Delta p \approx b/2 \cdot h/2b \approx h/4 > h/4\pi^2$ .

Unser Grundzustand erfüllt also die Unbestimmtheitsrelation (3.1) für Ort und Impuls. Die angeregten Zustände haben etwa die gleiche Ortsschwankung, aber eine grössere Impulsschwankung und erfüllen (3.1) erst recht.

### II.8.3 Schrödinger für freie Quantenobjekte

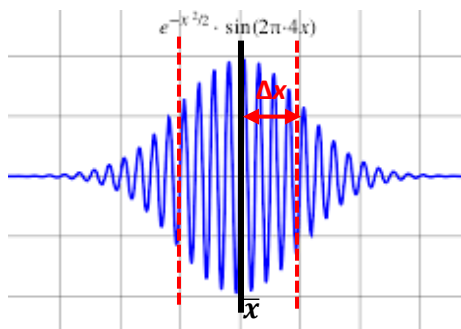
Wenn wir ein absolut freies Quantenobjekt ohne irgend einen Potentialtopf betrachten, dann müssen wir alle Lösungen von (3.5) in Betracht ziehen. Das sind alle Sinus- und Cosinus-Funktionen, bei denen die sogenannte Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$  die Bedingung zwischen  $p$  und  $k$  erfüllt, die unten angegeben ist:

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) \text{ mit der Abkürzung } k = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{de Broglie}}}$$

Sie überprüfen die Richtigkeit leicht, denn die zweite Ableitung liefert immer ein Minus-Zeichen und einen Faktor  $k^2$ . Die  $A$  und  $B$  fallen weg. Die Gesamtenergie  $E$  besteht nur aus der Bewegungsenergie  $p^2/2m$  und kann jeden beliebigen Wert annehmen: kontinuierliches Spektrum.

In 3.2.2 haben wir das freie Quantenobjekt nicht betrachtet. Seine Impulsschwankung ist  $\Delta p = 0$ , denn mit dem festen  $k$  ist auch der Impuls genau definiert. Doch wo ist das Teilchen? Überall!  $\Delta x = \infty$ , denn die unendlich lange Sinuskurve liefert dazu keine Information. Bei der Kontrolle der Unbestimmtheitsrelation (3.1) stoßen wir auf  $\Delta x \cdot \Delta p = \infty \cdot 0$ . Auch gilt  $\Delta x \cdot \Delta p > h/4\pi$ , denn real ist immer  $\Delta p > 0$ .

Wir kommen jetzt zurück auf das **Wellenpaket**, das wir in 2.6.1 nicht als *universelles Bild* für ein



Quantenobjekt haben wollten: Wenn wir etwas bei der Neutronenstreuung eine realistische Situation mit der Impulsschwankung  $\Delta p > 0$  haben, bedeutet das, dass die Neutronen in einem Überlagerungszustand mit einem Gemisch von Sinuskurven mit schwankenden Wellenlängen sind. Die Figur stellt den Spezialfall dieses Gemischs dar, bei dem die Überlagerung durch eine Gauss-Kurve begrenzt wird. Der erwartete Ort  $\bar{x}$  und seine Schwankung  $\Delta x$  werden dann schön sichtbar. In diesem Fall gilt:  $\Delta x \cdot \Delta p = h/4\pi$ . Das Gesetz kann akustisch nachvollzogen werden (Fourier).

Ein **freies Quantenobjekt** (Elektron, Neutron usw.) ist **kein Kügelchen** mit einem genauen Mittelpunkt, sondern eine fliegende Aufenthaltswahrscheinlichkeitswolke.

**II.8.4 Den 1s-Zustand des H-Atoms berechnen**

Das H-Atom ist punktsymmetrisch und man muss mit Polarkoordinaten arbeiten wie in der Geographie. Die Lösung hat dann die Form  $\psi(r, \theta, \varphi)$   
 Einstweilen lassen wir die geographische Länge  $\theta$  und die Breite  $\varphi$  ausser Acht und beschäftigen uns nur mit der radialen Zustandsfunktion. Das sieht dann im Hochschulmodus so aus:

$$\text{☹️☹️☹️} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) - \frac{8\pi^2 m r^2}{h^2} \left[ \frac{e^2}{4\pi\epsilon r} - E \right] \psi(r) - l(l+1)\psi(r) = 0 \quad \text{☹️☹️☹️}$$

Wir deuten an, dass sie den Wellenaspekt des Elektrons mit sich trägt; aber auch Masse  $m$  und Ladung  $e$  des Elektrons tauchen auf, die beide auf den Teilchenaspekt weisen. Die Entfernung des Elektrons vom Kern auf, die Grösse  $r$ , ist zwar die einzige Variable. Sonst sieht es hoffnungslos aus.

Verständlicher wird es, wenn wir die Ableitungen, wie in der Mathematik üblich, einfach mit  $\psi'(r)$  und  $\psi''(r)$  bezeichnen, die ganze Gleichung durch  $h^2/8\pi^2 m$  teilen und den Term mit  $E$  nach rechts bringen. Wir erhalten dann eine Gleichung, die (3.5) ähnelt:

$$\text{☹️} \quad -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \psi''(r) - \frac{h^2}{4\pi^2 m r} \cdot \psi'(r) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon r} \cdot \psi(r) + \frac{h^2}{8\pi^2 m} l(l+1) \cdot \psi(r) = E \cdot \psi(r) \quad \text{☹️}$$

Im grünen Teil mit der kinetischen Energie fällt der zweite Summand auf, der den Polarkoordinaten zu verdanken ist. Die potentielle Energie umfasst den roten Summanden von der elektrischen Kraft (anziehend, d.h. -) und den blauen Summanden von der Zentrifugalkraft (abstossend, d.h. +).

Da wir nur s-Zustände suchen, wo der Drehimpuls  $l = 0$  ist, fällt der letzte Term weg.

Nun schreiben wir  $y(x)$  anstatt  $\psi(r)$ , teilen die Gleichung durch  $x^2$  und fassen die vielen Konstanten zu den einfachen Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  zusammen:

$$c_1 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E$$

Dann sieht alles wesentlich weniger fremdartig, ja geradezu vertraut aus:

Schrödinger-Gleichung für das H-Atom ohne Drehimpuls  $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{c_1}{x}y + c_2y = 0$

Die Mathematiker haben diese Gleichung längst gelöst. Auch wir haben im Modul 2 eine dieser Lösungen, die Lösung  $y_1(x) = C \cdot e^{-x/a}$ , schon kennen gelernt. Nun müssen wir nur rückwärts rechnen und überprüfen, ob unsere Lösung diese Gleichung auch erfüllt. Man braucht dazu die Produkt- und die Kettenregel und viel Durchhaltevermögen. Im Verlaufe der Arbeit stellt man fest, dass  $y_1(x)$  die Gleichung erfüllt und dass die Konstante  $C$  herausfällt.

Man erhält aber nicht sofort Werte für  $a$  und  $E$ , sondern folgende «gewöhnliche» Gleichung:

$$\text{😊😊😊} \quad \left( \frac{1}{a^2} + c_2 \right) + \left( c_1 - \frac{2}{a} \right) \frac{1}{x} = 0 \quad \text{😊😊😊}$$

Da steht eine Gleichung für drei Unbekannte  $a$  und  $c_2$  (inklusive der Grösse  $E$ ) und  $x$ ??? Das ist aber kein Problem, denn diese Gleichung muss für alle  $x$  gültig sein. Das kann sie nur,

wenn die zweite Klammer = 0 ist  $\Leftrightarrow c_1 - 2/a = 0$

Aber dann muss auch die erste Klammer = 0 sein  $\Leftrightarrow 1/a^2 + c_2 = 0$

Und damit haben wir zwei Gleichungen für nur noch zwei Unbekannte. Ihre Lösungen lauten:

Bohr-Radius:  $a = 2/c_1 = \epsilon h^2 / \pi m e^2 = \mathbf{53 \text{ pm}}$

Wir wissen: Das ist **kein** Bahnradius, sondern eine Kenngrösse für atomare Grössenordnungen.

Rydberg-Energie  $E_1 = (-1/a^2) \cdot h^2/8\pi^2 m = -1/8 \cdot m e^4 / \epsilon^2 h^2 = \mathbf{-13.6 \text{ eV}}$

Das Minuszeichen bedeutet, dass diese Energie bei der Entstehung des gebundenen Zustands frei geworden ist und wieder aufgewendet werden muss, wenn man das Elektron befreit. Wenn ein Kern nun  $Z$  Protonen besitzt, ist die Coulomb-Kraft  $Z$ -mal grösser. Der Wert von  $a$  wird dann  $Z$ -mal kleiner, also 92-mal beim Uran. Die Grösse  $E$  wird  $Z^2$ -mal grösser, also beim Uran 8464-mal.

Wer Lust auf mehr Differentialrechnung verspürt, kann nachweisen, dass auch der 2s-Zustand mit der Kontenfläche  $\psi_2(a) = 0$  die Gleichung ebenfalls erfüllt und eine weniger negative Energie besitzt.